MECÂNICA GERAL - 2/2009

LISTA 7

1. Uma partícula de massa m presa à extremidade de uma mola de constante elástica k está confinada a se mover apenas ao longo do eixo horizontal x sem sofrer a ação de forças dissipativas. No instante $t = 0$ a partícula está em repouso na situação de equilíbrio e é sujeita a um impulso instantâneo para a direita. Ela se move até a posição $x_{max} = A$ e continua a oscilar em tôrno da posição de equilíbrio.
(a) Escreva a equação da conservação de energia deste problema e use-a para encontrar a velocidade da partícula $\dot{x}$ em função de sua posição x e de sua energia total E.
(b) Mostre que $E = 1/2kA^2$ e use este resultado para eliminar E de sua equação para $\dot{x}$. Integre a equação resultante e encontre o tempo necessário para que a partícula se mova de sua posição de equilíbrio em $x = 0$ até uma posição genérica x.
(c) Use o resultado do item anterior para encontrar x em função de t e demonstre que a partícula executa um movimento harmônico simples com período $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2. Um brinquedo de criança consiste de um cilindro de base circular montado sobre um hemisfério de raio R. O centro de massa do conjunto, quando este está apoiado sobre o hemisfério, fica a uma altura h acima do chão.
(a) Escreva uma equação para a energia potencial gravitacional do brinquedo quando este é inclinado de um ângulo θ com relação à vertical. (Para isso, será necessário encontrar a altura do centro de massa em função da inclinação θ. Como ajuda, pense primeiro na altura do centro do hemisfério quando o brinquedo está inclinado).
(b) Para que valores de R e h a posição de equilíbrio $\theta = 0$ é estável?

3. Considere a máquina de Atwood discutida em sala, mas suponha agora que a roldana tem raio R e momento de inércia I.
(a) Escreva a equação para a energia total do sistema E em termos de x e $\dot{x}$. (Lembre que a energia cinética da roldana é $1/2I\omega^2$).
(b) Prove que é possível obtermos a equação de movimento para a coordenada x tomando a derivada da equação $E = constante$ - o que é verdade para qualquer sistema conservativo unidimensional. Obtenha a mesma equação usando diretamente a 2^a lei de Newton para cada uma das massas e para a roldana, e eliminando em seguida as duas tensões desconhecidas.

4. Uma massa m se move em uma órbita circular centrada na origem sob a ação de uma força central atrativa com energia potencial $U = kr^n$. Prove que $T = nU/2$, resultado muito útil conhecido como o **teorema do virial**.

5. Na aula expositiva, eu afirmei que uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que seja central e esfericamente simétrica é automaticamente conservativa. Prove este importante resultado de duas maneiras distintas:
(a) Como a força é central e esfericamente simétrica, podemos escreve-la na forma $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$. Use coordenadas cartesianas e demonstre que isto implica que $\nabla \times \vec{F} = 0$.
(b) Ainda mais rápido: procure em um livro de matemática a expressão para o rotacional em coordenadas esféricas e use-a para mostrar que $\nabla \times \vec{F} = 0$.

6. Considere colisões elásticas entre duas partículas de massas diferentes m_1 e m_2 e demonstre os

seguintes resultados clássicos:
(a) Se a colisão for unidimensional, então a velocidade relativa depois da colisão é simétrica (isto é, tem mesmos módulo e direção, mas sentido oposto) à velocidade relativa antes da colisão.
(b) Se a colisão for bidimensional e a partícula de massa m_2 estiver inicialmente em repouso, então o ângulo θ entre as duas velocidades finais satisfaz ás desigualdades: (i) $\theta < \pi/2$ se $m_1 > m_2$; $\theta > \pi/2$ se $m_1 < m_2$.

7. Tanto a força Coulombiana quanto a gravitacional estão associadas a energias potenciais que têm a forma $U = \gamma/(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$, onde $\gamma = kq_1q_2$ para a força Coulombiana, $\gamma = -Gm_1m_2$ para a gravitacional, e $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são as pocições das duas partículas. Prove detalhadamente que $-\nabla_1 U$ é a força sobre a partícula 1 e que $-\nabla_2 U$ é a força sobre a partícula 2.

8. Considere um modelo clássico aproximado para o átomo de hidrogênio, no qual um elétron de carga $-e$ e massa m se move em uma órbita circular de raio r em torno de um próton de carga e em repouso.
(a) Use o teorema do virial para provar que $T = -1/2U$ e que $E = 1/2U$.
(b) Considere agora uma colisão inelástica entre um elétron e este átomo de hidrogênio: o elétron 1 está em órbita circular em torno do próton parado e o elétron 2 se aproxima, vindo de muito longe com energia cinética T_2. Quando este último colide com o átomo, o elétron 1 é expulso e o elétron 2 é capturado e passa a se mover em órbita circular de raio r' em torno do próton.
(i) Escreva uma expressão para a energia total deste sistema de tres partículas numa situação genérica. (Sua resposta deve conter cinco termos, tres de energia potencial e duas de energia cinética, já que o próton não se move.)
(ii) Encontre valores para estes cinco termos e para a energia total E, muito antes da colisão ocorrer e muito depois dela ter ocorrido. Qual será a energia cinética do elétron 1 depois de ser expulso e estar muito longe? Dê suas respostas em termos de T_2, r e r'.